



TITLE:

# 一般化された Coleman-Hepp モデルにおける量子コヒーレンス(量子情報理論と開放系)

AUTHOR(S):

桒山, 薫; 高木, 伸

---

CITATION:

桒山, 薫 ...[et al]. 一般化された Coleman-Hepp モデルにおける量子コヒーレンス(量子情報理論と開放系). 数理解析研究所講究録 1997, 980: 12-21

ISSUE DATE:

1997-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60877>

RIGHT:

## 一般化された Coleman-Hepp モデルにおける量子コヒーレンス

東北大理 桒山 薫 (Kaoru Hiyama)  
高木 伸 (Shin Takagi)

### §§ 概要

量子力学の基礎において未だに問題点の多い、観測と波束の収縮に関する問題に関連して、中里氏と Pascazio 氏により改良された Coleman-Hepp モデルを更に一般化して論ずる。この一般化されたモデルでは、各々任意の大きさ  $s$  を持つ  $N$  個のスピンの 1 次元配列を観測器と見做し、そこへ観測の対象として内部自由度が 2 である粒子（今後これを電子と呼ぶ）を入射させ、この“観測”が電子の量子コヒーレンスに与える影響について調べる。量子コヒーレンスの大きさの目安となる関数  $C(t)$  ( $t$ : 時間) を導入することにより、電子がコヒーレンスを失う様子がどのように  $s, N$  に依存するのかについても見る。

観測器の初期状態は、基底状態、あるいは温度  $T$  における熱平衡状態を仮定して調べる。、 $T = 0$  の漸近的な  $C(\infty)$  は  $sN$ 、即ち全スピンに依存するが、一般には  $s, N$  の各々に依存する。また、 $s = 1/2$  の場合には温度に依存しない。一般には  $|C(\infty)|$  は直感に反して必ずしも温度の減少関数ではないが、現実の観測器は非常に複雑な準位を持つたくさんの粒子から出来ていることをふまえて  $s \rightarrow \infty$  の場合、及び  $N \rightarrow \infty$  (但し  $s=1/2$  の場合を除く) の場合を考えると、温度の減少関数となることがわかる。(本文に入る前に後記を参照のこと。)

### §1. モデルの説明

我々のモデルで扱う“観測”を図示すると以下ようになる。

FIG.1

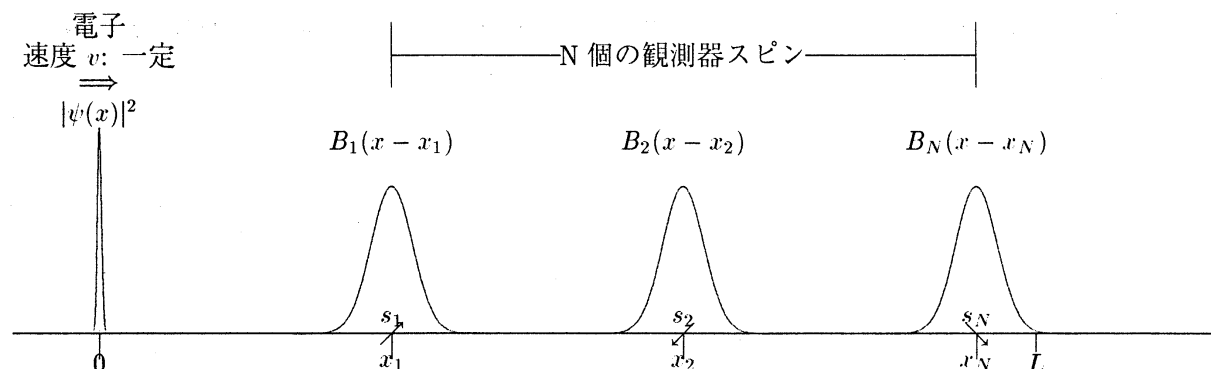


FIG.1

ここで電子（そのスピン状態は $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ の重ね合わせ、軌道部分は $|\psi\rangle$ で $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ 。）の波束は、一定速度 $v$ で観測器を通過する。その際、 $|\uparrow\rangle$ の状態のみが観測器と相互作用し、 $|\downarrow\rangle$ の状態は相互作用無しに通過する。ここで $|\uparrow\rangle$ と $|\downarrow\rangle$ という二つの状態は各々、ダブルスリットの干渉実験において、スリット通過後の波束のうち一方のスリットを通過したものともう一方を通過したもの、に対応している。電子がどちらのスリットを通過したのかを調べるため一方のスリットに観測器を置くと、干渉縞が消失すると一般に言われているが、その内容を詳細、且つ正確に調べるための模型である。

このような観測過程を記述するハミルトニアンは、電子のスピン状態 $|\uparrow\rangle$ への射影演算子 $P_+ = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|$ を用いて、

$$H = H_\omega^0 + P_+ H_\omega^1 \quad (1.1a)$$

で表される。但し、

$$H_\omega^0 = H^0 + \sum_l \omega_l (S_l^z + s_l) \quad (1.1b)$$

$$H^0 = vP + \frac{1}{2}\Omega\tau^z \quad (1.1c)$$

$$\begin{aligned} H_\omega^1 &= \frac{i}{2} \sum_l B_l (X - x_l) S_l^- \exp(i\omega_l X/v) + \text{h.c} \\ &= \sum_l \mathbf{S}_l \cdot \mathbf{B}_l(X, x_l) \end{aligned} \quad (1.1d)$$

である。ここで $X$ と $P$ はそれぞれ電子の位置演算子と運動量演算子、 $\tau^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) は電子のスピン演算子、 $S_l^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ )、 $s_l$ は観測器の $l$ 番目のスピンのスピン演算子及びその大きさである。また、 $z$ 方向に一定磁場がかかっており、その磁場による電子及び $l$ 番目のスピンの振動数を各々 $\Omega$ 、 $\omega_l$ とし、また電子の速度を $v$ 、電子と $l$ 番目のスピンとの間に生じる相互作用の大きさを $B_l(X - x_l)$ とする。（磁場と次元が同じなので、今後これを磁場と呼ぶ。）ここで電子の運動エネルギーの部分が $P$ の一次とした。これは電子が一定速度で通過する、即ち波束が変形しない、という仮定を表現している。これにより、このハミルトニアンを用いて時間発展を厳密に議論することが出来るようになる。また、中里氏と Pascazio 氏により従来のモデルに $\omega_l$ が導入され、電子と観測器の間でのエネルギー交換が許されるようになった。また、温度の対する考察が可能になった。そして我々は従来 $s = 1/2$ だったものを任意の $s$ に拡張し、 $s$ 依存性についても調べた。これにより温度依存性に対する考察が

可能になった。また (1.1d) では以下のような回転磁場を用いて表した。

$$\mathbf{S} = (S^1, S^2, S^3) \quad (1.2)$$

$$\mathbf{B}(X, x) = B(X - x) \left( -\sin \frac{\omega X}{v}, \cos \frac{\omega X}{v}, 0 \right) \quad (1.3)$$

この表現により観測器スピンは、電子の位置により方向が変化する回転磁場を受けていることがわかる。そこで容易のため回転系に移って議論することにする。

## §.2 時間発展

時間発展演算子は次のように与えられる。

$$\exp(-iHt) = \exp(-iH_\omega^0 t) \{ \mathcal{P}_- + U_\omega(t) \mathcal{P}_+ \} \quad (2.1)$$

ここで

$$U_\omega(t) = \exp(iH_\omega^0 t) \exp[-i(H_\omega^0 + H_\omega^1)t] \quad (2.2)$$

は、相互作用表示で電子が  $|\uparrow\rangle$  にある時のみ作用する時間発展である。回転系に移るユニタリー変換の演算子

$$\mathcal{R}_l(X) = \exp(-i\omega_l S_l^3 X/v) \quad (2.3a)$$

$$\mathcal{R}(X) = \prod_l \mathcal{R}_l(X) \quad (2.3b)$$

により

$$U_\omega(t) = \mathcal{R}(X) U(t) \mathcal{R}(X)^\dagger \quad (2.4)$$

$$\exp(-iHt) = \mathcal{R}(X) \exp(-iH^0 t) \{ \mathcal{P}_- + U(t) \mathcal{P}_+ \} \mathcal{R}(X)^\dagger \quad (2.5)$$

と変換する。 $U(t)$  は相互作用表示において回転系から見た電子の  $|\uparrow\rangle$  に作用する時間発展演算子で、

$$\begin{aligned} U(t) &= \exp(iH^0 t) \exp[-i(H^0 + H^1)t] \\ &= \exp(ivPt) \exp[-i(vP + H^1)t] \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$H^1 = \sum_l B_l(X - x_l) S_l^2 \quad (2.7)$$

で与えられ、方向一定の磁場を取り扱えばよいことになる。そこで次の運動方程式を解く。

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t) = H^1(t)U(t) \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} H^1(t) &= \exp(ivPt)H^1\exp(-ivPt) \\ &= \sum_l B_l(X + vt - x_l)S_l^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここで、 $[H^1(t), H^1(t')] = 0$  であるから、(2.8) を容易に積分することが出来て、結果は

$$U(t) = \exp[-i \sum_l \theta_l(X, t) S_l^2] \quad (2.10)$$

$$\theta_l(x, t) = \int_0^t dt' B_l(x - x_l + vt') \quad (2.11)$$

となる。 $\theta_l(x, t)$  は観測器の  $l$  番目のスピンの時間に依存する回転角を意味するが、 $x$  依存性のあることに注意する。

### §.3 量子コヒーレンスの目安 $C(t)$ の導入

電子の  $|\uparrow\rangle$  と  $|\downarrow\rangle$  の位相関係を調べるために  $\tau^-(t)$  の期待値を調べる。

まず、観測器と電子からなる系の初期時刻での密度演算子を次の様に仮定する。

$$\rho_{total} \equiv |particle\rangle\langle particle| \otimes \rho_{det}. \quad (3.1)$$

ここで電子に対しては軌道状態を  $|\psi\rangle$  とし純粋状態を仮定して

$$|particle\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \cdot |\psi\rangle$$

で与えられるものとし、 $\rho_{det}$  は初期時刻における観測器の密度演算子であるとする。

$\tau^-(t)$  を計算すると以下ようになる。

$$\langle \tau^- \rangle(t) = C(t)e^{-i\Omega t} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} C(t) &\equiv \langle U_\omega(t) \tau^- \rangle \\ &= \text{Tr}\{\rho_{total} U_\omega(t) \tau^-\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$= \langle \psi | \text{Tr}_{det}\{U_\omega \rho_{det}\} | \psi \rangle \quad (3.4)$$

但し、 $Tr_{det.}$ は観測器に関してのみトレースをとることを意味する。(3.2)の $e^{-i\Omega t}$ の項は観測器との相互作用が無い場合の歳差運動の項であり、 $C(t)$ に観測の影響の全てが含まれている。また、相互作用がある場合には $C(0) = 1$ 、 $|C(t)| \leq 1$ であり、ない場合には $C(t) \equiv 1$ であることから、 $|C(t)|$ は時刻 $t$ での電子のコヒーレンスの目安と見做すことができる。以下、観測器の初期状態を変化させた場合の $C(t)$ について調べていく。

#### §4. 観測器が初期時刻に基底状態にある場合

まず始めに、初期時刻 $t=0$ において観測器の状態が基底状態にある場合を考える。この場合の密度演算子は

$$\rho_{det.} = |G\rangle\langle G|$$

$$|G\rangle \equiv |s_1 - s_1\rangle |s_2 - s_2\rangle \cdots |s_N, -s_N\rangle$$

で与えられ、 $|s, m\rangle$ は観測器スピンの状態で $s, m$ は各々スピンの大きさ、及び $S^3$ の固有値である。 $C(t)$ を計算すると

$$\begin{aligned} C(t) &= \langle \psi | \langle G | U_\omega(t) | G \rangle | \psi \rangle \\ &= \int dx |\psi(x)|^2 \prod_l \left( \cos \frac{\theta_l(x, t)}{2} \right)^{2s_l} \end{aligned} \quad (4.1)$$

を得る。ここで漸近的な、即ち $t \rightarrow \infty$ の場合の $\theta_l(x, t)$ は

$$\theta_l(x, \infty) \equiv \theta_l = \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} dx B_l(x) \quad (4.2)$$

で与えられ $x, t$ に依らない定数となることに注意すると、漸近的には

$$C(\infty) = \prod_l \left( \cos \frac{\theta_l}{2} \right)^{2s_l} \quad (4.3)$$

で与えられる。 $\theta_l$ 及び $s_l$ が $l$ に依存しない場合は更に簡単化されて

$$C(\infty) = \left( \cos \frac{\theta}{2} \right)^{2Ns} \quad (4.4)$$

で置き換えられて、この場合には $N$ と $s$ の積、即ちtotal スピンにのみ依存することがわかる。

また、 $S_l$ は $l$ に依らず、 $\theta_l$ にわずかな揺らぎがある場合には平均値： $\theta \equiv N^{-1} \sum_l \theta_l$ 、及び分散： $(\delta\theta)^2 \equiv N^{-1} \sum_l (\theta_l - \theta)^2$  を用いて (4.4) から

$$C(\infty) = \exp[2s \sum_l \log \cos \frac{\theta_l}{2}]$$

$$\simeq \left\{ \left( \cos \frac{\theta}{2} \right) \exp \left[ -\frac{(\delta\theta)^2}{8(\cos \frac{\theta}{2})^2} \right] \right\}^{2Ns} \quad (4.5)$$

を得ることができる。このように、コヒーレンスは分散の存在により減少することがわかる。これも直感通りであろう。

### §5. $C(t)$ の時間発展の具体例 ( $T=0$ )

以下に  $(N, s) = (1, 1)$ , 及び  $(2, 1/2)$  の場合について  $C(t)$  の時間発展を図示する。但し、FIG.1 において  $x_1 = a$ ,  $x_2 = 2a$  とし、以下のように設定する。

$$B(x)/v \propto \delta^{-1} \exp(-x^2/\delta^2) \Theta(\delta - |x|) \quad (\Theta(x) \text{ は階段関数、} \delta = 0.4a \text{ と定めた。})$$

$$|\Psi(x)|^2 = \delta(x)$$

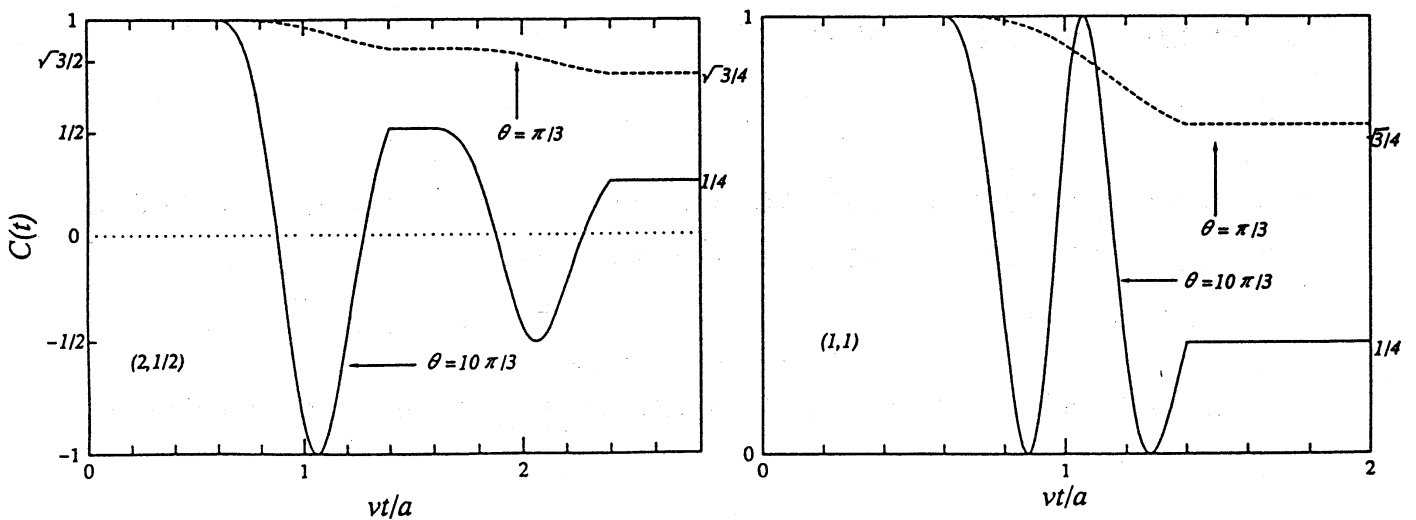


FIG.2

このように、どちらも  $Ns = 1$  なので (4.4) により  $\theta$  の値が等しければ  $C(\infty)$  の値は等しいが、時間発展の様子は異なる。

### §6. 観測器の初期状態が温度 $T$ における平衡状態にある場合

次に観測器が、温度  $T$  の熱浴の中で熱平衡状態にあり初期時刻  $t = 0$  に熱浴から切り離された場合を考える。この場合の初期時刻での密度演算子は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\rho_{det.} &= \prod_l \rho_{s_l}(\beta_l) \\ \rho_s(\beta) &= \frac{\exp(-\beta S^z)}{Z_s(\beta)}, \quad \beta_l = \frac{\omega_l}{k_B T} \\ Z_s(\beta) &= \sum_{-s}^s \exp(-\beta S^z) = \frac{\sinh(s + \frac{1}{2})\beta}{\sinh \frac{1}{2}\beta}\end{aligned}\quad (6.1)$$

これを用いて  $C(t)$  を計算すると

$$C(t) = \langle \psi | \text{Tr}_{det.} \{ U_\omega(t) \rho_{det.} \} | \psi \rangle \quad (6.2)$$

$$= \int dx |\psi(x)|^2 \prod_l W(s_l, \beta_l, \theta_l(x, t)) \quad (6.3)$$

但し、

$$\begin{aligned}W(s, \beta, \theta) &\equiv \frac{\text{Tr} \{ \exp(-\beta S^3) \exp(-i\theta S^2) \}}{Z_s(\beta)} \\ &= \frac{\sum_{m=-s}^s \exp(-\beta m) r(s, m, m, \theta)}{Z_s(\beta)}\end{aligned}\quad (6.4)$$

で与えられる。ここで

$$r(s, m, m', \theta) = \langle s, m | \exp(-i\theta S^y) | s, m' \rangle \quad (6.5)$$

は、回転演算子の行列要素で、次の性質、

$$r(s, m, m, \theta) = r(s, -m, -m, \theta)$$

から、 $s = 1/2$  の場合には  $C(t)$  が、温度に依らないことが容易にわかる。これは特記すべき点である。また  $\exp(-\pi S^y)$  による反転で元に戻るのは  $m = 0$  の状態のみであるから

$$r(s, m, m; \pi) = (-)^s \delta_{m,0}.$$

という性質から、もし  $s_l$  のうちひとつでも半奇整数ならば  $C(\infty) = 0$  となり、全ての  $s_l$  が整数の時には

$$|C(\infty)| = 1 / \prod_l Z(s_l, \beta_l) \quad (6.6)$$

となることがわかる。後者の場合に注目すべき点は、 $Z(s_l, \beta_l)$  は温度の減少関数であるため、(6.6) で与えられる  $|C(\infty)|$  は温度の増加関数になることである。これは、量子コヒーレンスに対する直感に反する。



そこで、 $W(s, \beta; \theta)$  の閉じた形式を調べる。オイラーの回転角  $\gamma$ 、 $\theta$  及び  $\gamma'$  で表される回転を、単位ベクトル  $\mathbf{n}$  回りの角度  $\varphi$  の回転で表した場合、次の 2 式が成立する。

$$\exp(-i\gamma S^3)\exp(-i\theta S^2)\exp(-i\gamma' S^3) = \exp(-i\varphi \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}) \quad (6.7a)$$

$$\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\gamma + \gamma'}{2} = \cos \frac{\varphi}{2} \quad (6.7b)$$

この両辺のトレイスをとり、

$$\text{tr} \exp[-i(\gamma + \gamma') S^3] \exp(-i\theta S^2) = Z(s, i\varphi) \quad (6.8)$$

更に両辺が解析的なので  $\gamma + \gamma'$  を  $-i\beta$  で置き換えることができ、

$$W(s, \beta; \theta) = Z(s, \zeta) / Z(s, \beta) \quad (6.9a)$$

$$\cosh \frac{\zeta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} \cosh \frac{\beta}{2} \quad (6.9b)$$

を得る。この (6.9) の関係を利用して任意の  $s$  に対して  $W(s, \beta; \theta)$  を計算することができる。例を示す。

$$\begin{aligned} W\left(\frac{1}{2}, \beta; \theta\right) &= \cos \frac{\theta}{2} \\ W(1, \beta; \theta) &= \frac{\cosh \beta + (1 + \cosh \beta) \cos \theta}{1 + 2 \cosh \beta} \\ W\left(\frac{3}{2}, \beta; \theta\right) &= \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} - (\cosh \beta)^{-1} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right\} \cos \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (6.10)$$

また、 $\omega_l$ 、 $\theta_l$  及び  $s_l$  が  $l$  に依らない場合

$$C(\infty) = [W(s, \beta; \theta)]^N \quad (6.11)$$

となる。有限温度についても  $C(t)$  の具体例を下に示す。(設定等は FIG.1 の場合と同じ。)

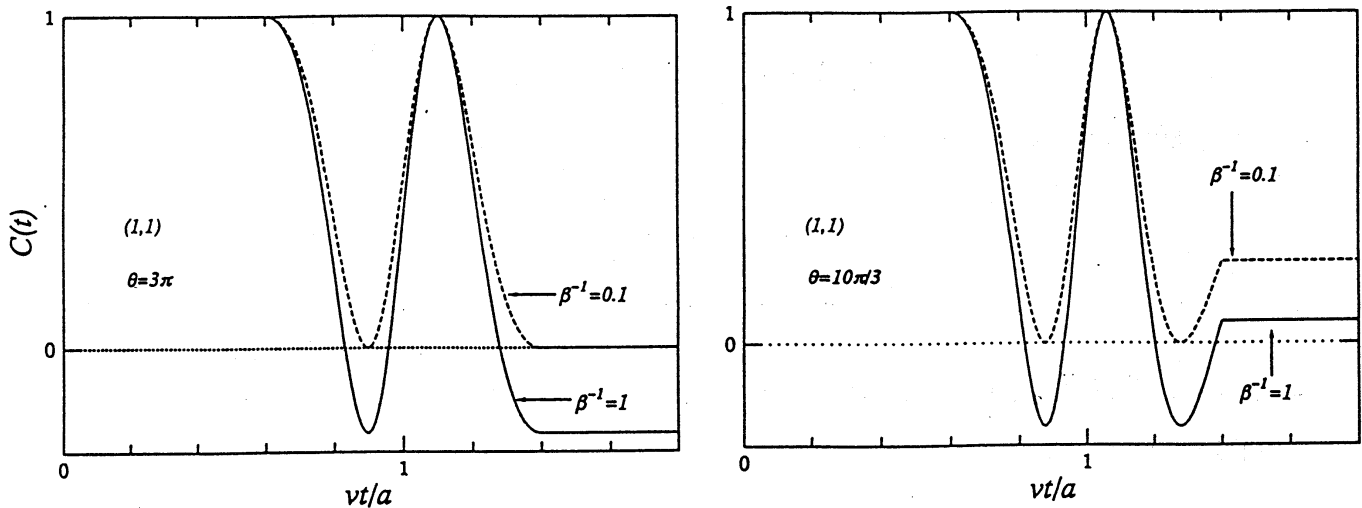


FIG.3

FIG.3

ここで、次の二つの性質、

$$W(s, \beta; \theta) = W(s, \beta; -\theta) \quad W(s, \beta; \pi + \theta) = (-)^{2s} W(s, \beta; \pi - \theta) \quad (6.12)$$

から、 $\theta$ に関しては  $[0, \pi]$  についてのみ調べれば十分であることがわかる。

この図からもわかるように  $|W|$ 、あるいは  $|C(\infty)|$  は、必ずしも温度の減少関数ではない。ここにも、我々のコヒーレンスに対する直感に反する例がある。

### §7. $s$ または $N$ が大きい場合

そこで、より現実的な“観測器”というものを扱うために  $s$ 、または  $N$  が十分に大きい場合を考える。実際の観測器は多くの粒子から成り立っているし、またより複雑な準位を持つであろうから、である。

まず、磁場の大きさに関し  $f(x)$  及び  $\alpha$  は  $s$  に依らないとし、次の条件を設定する。

$$B(x) = s^{-1/2} f(x) \quad \theta = s^{-1/2} \alpha \quad (7.1)$$

次に、Holstein-Primakoff 変換によりスピン演算子を調和振動子の生成・消滅演算子で書き直す。

$$S^3 = a^\dagger a - s \quad S^- = (2s - a^\dagger a)^{1/2} a \quad S^+ = a^\dagger (2s - a^\dagger a)^{1/2} \quad (7.2)$$

そして  $s \rightarrow \infty$  の極限を考える。すると、ハミルトニアンが以下のようにボゾンの吸収・放出を生じる描像に置き変る。

$$H_\omega^0 = H^0 + \sum_l \omega_l a_l^\dagger a_l \quad (7.3a)$$

$$H_\omega^1 = \frac{i}{\sqrt{2}} \sum_l f_l (X - x_l) a_l \exp(i\omega_l X/v) + \text{h.c.} \quad (7.3b)$$

$s \rightarrow \infty$  の極限での  $C(\infty)$  は、以下のようになる。

$$C(\infty) = \exp[-N\alpha^2(n_\beta + 1/2)] \quad (7.4)$$

$$n_\beta = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} = \langle a^\dagger a \rangle_\beta$$

ここで  $\langle \dots \rangle_\beta$  は温度平均を表し  $n_\beta$  はボゾンの平均粒子数で  $T$  の単調増加関数なので、 $|C(\infty)|$  は、温度の単調減少関数になる。

また、 $s$  を固定して  $N \rightarrow \infty$  を考えた場合も同様に、 $\tilde{B}(x)$ 、および  $\tilde{\theta}$  は  $N$  に依らないとし、

$$B(x) = N^{-1/2} \tilde{B}(x), \quad \theta = N^{-1/2} \tilde{\theta} \quad (7.5)$$

と設定する。ここで観測器の大きさ  $L$  (Fig.1 参照) を固定して  $N \rightarrow \infty$  の極限での  $C(\infty)$  は、

$$C(\infty) = \exp(-\kappa \tilde{\theta}^2 / 2) \quad (7.6)$$

$$\kappa_\beta = \langle (S^y)^2 \rangle_\beta = \frac{1}{2} \{ s(s+1) - \langle (S^z)^2 \rangle_\beta \} \quad (7.7)$$

で与えられる。ここで  $\langle (S^z)^2 \rangle_\beta$  が温度の単調減少関数であるため  $|C(\infty)|$  は温度の単調減少関数になる。以上の考察により  $s \rightarrow \infty$  及び  $N \rightarrow \infty$  のどちらの場合も  $|C(\infty)|$  は温度の単調減少関数になることがわかった。

## §8. 結論

スピンの大きさを  $1/2$  から任意の大きさ  $s$  に拡張することにより、 $s$ 、 $N$  各々の  $C(t)$  への影響を一般の温度において調べることができた。

[ i ] 絶対零度での  $C(\infty)$  は  $sN$  の積に依存するが一般の場合には、 $s$ 、 $N$  の各々に依存する。

[ ii ]  $s = 1/2$  の場合には温度依存性が無い。

[ iii ]  $s \rightarrow \infty$ 、及び  $N \rightarrow \infty$  の場合の  $|C(\infty)|$  は、温度の単調減少関数になる。

特に [iii] により、現実的な観測器ではコヒーレンスは温度の単調減少関数になると予想される。

## §§ 後記

より詳細な議論に興味のある方は、K. Hiayama and S. Takagi, Phys. Rev. A **48** (1993) 2568 を御覧下さい。タイトルは、"Generalized Coleman-Hepp model and quantum coherence" です。また、今回の我々の研究の動機を与えて下さった研究メンバーの中里氏の発表が、研究会当日はこの題目の次にございましたが、順序としてはそちらの報告書を先に読まれた方が、本旨が理解され易いと思います。